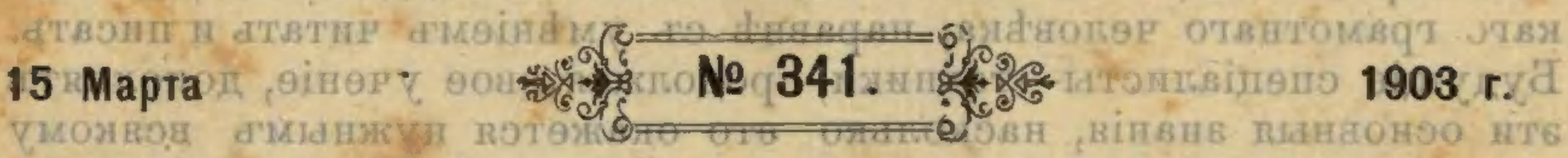
XXIX Сем. № 5.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



15 Марта № 341. 1903 г.

По поводу рѣчи о техническомъ образованіи, произнесенной при открытіи сессіи Британской Ассоціаціи сентября 1902 г., президентомъ Отдѣла Техники, J. Perry.

Привать-Доцента В. Лермантова въ С.-Петербургѣ.

Въ рѣчи этой проф. Перри, со свойственной ему оригинальностью и живостью изложенія, примѣняетъ къ преподаванію прикладной науки вообще тѣ же идеи, которыя были имъ высказаны годомъ раньше въ примѣненіи къ преподаванію математики [1]). Множество реальныхъ примѣровъ, взятыхъ авторомъ, большею частью, изъ собственныхъ воспоминаній юности и своей преподавательской практики, вполнѣ наглядно выясняютъ его мысль. Поэтому рѣчь эту слѣдовало-бы перевести полностью, но ея размѣръ и множество примѣровъ, взятыхъ изъ области техники и, вслѣдствіе этого, чуждыхъ всѣмъ не техникамъ, заставляютъ меня помѣстить здѣсь лишь самое главное, [2]) въ вольномъ изложеніи.

Проф. Перри проводитъ чрезъ всю свою рѣчь слѣдующее положеніе: современный юноша имѣетъ право требовать отъ школы, чтобы она дала ему: 1) умѣнье почерпать знанія изъ

[1]) См. „В. О. Ф." XXVIII сем. № 1, стран. 1.

[2]) Полный переводъ, вѣроятно, появится въ ближайшемъ будущемъ въ „Вѣстникѣ Общ. Технологовъ".

научной литературы, по мѣрѣ того какъ ему въ этомъ будетъ представляться надобность, 2) умѣнье дѣлать нужные расчеты, при помощи методовъ математики, и 3) умѣнье наблюдать явленія природы и дѣлать опыты. На это возражаютъ, что для будущихъ техниковъ это правильно, но не всѣ-же юноши станутъ техниками. Однако, въ послѣдніе 50 лѣтъ именно развитіе научной техники, т. е. прикладной науки, преобразовало кореннымъ образомъ весь строй жизни цивилизованныхъ странъ, поэтому въ наше время знаніе основъ техники стало необходимымъ для всякаго грамотнаго человѣка, наравнѣ съ умѣніемъ читать и писать. Будущіе спеціалисты—техники, продолжая свое ученіе, дополнятъ эти основныя знанія, насколько это окажется нужнымъ всякому изъ нихъ, а другіе будутъ пополнять свои свѣдѣнія по другимъ отраслямъ знанія, техническая-же грамотность, пріобрѣтенная въ начальной, общей школѣ, послужитъ имъ лишь для пониманія обыденныхъ примѣненій науки и правильнаго пользованія ея благами.

Вслѣдъ за этимъ, проф. Перри очень оригинально объясняетъ, почему многіе выдающіеся дѣятели по разнымъ отраслямъ научной и практической дѣятельности—не спеціалисты по педагогіи,—даютъ несообразные отвѣты, когда ихъ просятъ указать, какіе предметы обученія и обстоятельства ученическихъ годовъ наиболѣе способствовали развитію ихъ таланта. Всѣ учившіеся классическимъ языкамъ въ Англіи обыкновенно считаютъ, что они выучились мыслить именно чрезъ посредство изученія этихъ предметовъ. Такую увѣренность проф. Перри объясняетъ тѣмъ фактомъ, что англійскіе школьные учителя умѣютъ хорошо преподавать одни только классическіе языки, всѣ же остальные предметы преподаются такъ плохо, что отъ нихъ въ головѣ ученика не остается никакихъ слѣдовъ. Поэтому въ зрѣломъ возрастѣ человѣкъ, не привыкшій обращать особое вниманіе на педагогическіе вопросы, вполнѣ чистосердечно можетъ приписывать развивающее значеніе одной только школьной латыни: всѣ другіе школьные предметы были для него самого фактически безполезны. При изученіи же своей спеціальности каждый встрѣчалъ трудности научнаго или практическаго рода, и, только преодолѣвъ эти трудности, почувствовалъ свою силу и началъ имѣть успѣхъ. Поэтому многіе склонны приписывать большое воспитательное значеніе именно этимъ самымъ трудностямъ и предлагать искусственно вводить ихъ въ курсъ обученія каждаго техника. Но, давая такіе совѣты, эти выдающіеся дѣятели забываютъ, что они люди незаурядные, и поэтому самому были въ силахъ преодолѣть встрѣчавшіяся имъ препятствія. Но заурядные молодые люди и такъ встрѣчаютъ каждый на своемъ пути своего рода затрудненія; зачѣмъ же создавать еще искусственныя? Такъ, въ старину въ Англіи техники получали свое образованіе на заводахъ и въ конторахъ, куда они поступали въ качествѣ учениковъ. Тамъ пріучали ихъ къ дѣлу, но никто не заботился непосредственно о дополненіи ихъ научнаго образованія, и же-

лающему надо было учиться самоучкою или искать себѣ учителей на сторонѣ. Къ такому порядку совѣтуютъ вернуться многіе практики. Однако, самъ Перри былъ въ такомъ положеніи и скоро почувствовалъ, что ему необходимо узнать, что значитъ $\frac{dy}{dx}$, чтобы понимать книги по своей спеціальности, но никто изъ окружающихъ не могъ ему этого растолковать. Послѣ четырехъ лѣтъ практическаго ученичества на механическомъ заводѣ, Перри имѣлъ счастье попасть въ хорошую техническую школу, гдѣ его учителемъ былъ, между прочими, и I. I. Томсонъ. Тамъ только онъ увидѣлъ свѣтъ: съ первыхъ же лекцій этотъ профессоръ показалъ имъ, что не все, что написано въ учебникахъ, непреложная истина, что изъ простыхъ наблюденій можно и самому узнавать много новаго и дѣлать правильныя умозаключенія. Въ своемъ изложеніи онъ снисходилъ сначала до степени пониманія своихъ учениковъ, чтобы постепенно поднять ихъ до своего уровня, а не требовалъ отъ нихъ сразу пониманія истинъ, еще недоступныхъ для ихъ умовъ. Между тѣмъ, программы этихъ лекцій и средства заведенія были далеко ниже, чѣмъ во всякомъ германскомъ политехникумѣ, но одно ужъ близкое общеніе съ способными и преданными своему дѣлу профессорами сторицею восполняли этотъ недостатокъ. Неужели надо отказаться отъ всѣхъ благъ такого преподаванія и вернуться къ старому?

Въ техническомъ училищѣ, по мнѣнію проф. Перри, всѣ преподаватели должны быть техниками или, по крайней мѣрѣ, настолько знакомыми съ разными отраслями техники, чтобы знать, чего онѣ требуютъ отъ науки. Иначе преподаваніе непремѣнно получитъ „академическій" безплодный характеръ, и сообщаемыя знанія станутъ непримѣнимыми. Такъ, напримѣръ, математики развили свою науку для нея самой, и преподаютъ ее въ такомъ духѣ всѣмъ ученикамъ, сокращая лишь подробности, смотря по обширности программъ. Между тѣмъ, технику математика нужна какъ орудіе; ему некогда изучать тѣ изъ ея отдѣловъ, которые не примѣняются непосредственно въ его спеціальности, и даже въ примѣнимыхъ знаніе удобныхъ пріемовъ вычисленія важнѣе изящныхъ доказательствъ. Изъ запаса знаній каждой науки для учениковъ-техниковъ надо выбирать не тѣ же статьи, что для общеобразовательнаго курса; даже основы науки можно часто излагать иначе, подходить къ нимъ съ другой стороны. Запасъ научныхъ фактовъ теперь такъ великъ, что необходимо изучать только самое нужное. Если ученые древней Греціи и Египта, напримѣръ, дошли до познанія истинъ элементарной геометріи путемъ отвлеченнаго мышленія, то изъ этого нельзя еще заключать, что всякій мальчикъ долженъ дойти до ихъ усвоенія такимъ-же путемъ: современный мальчикъ не обладаетъ складомъ ума греческаго философа, для мальчика складываніе бумажекъ и дѣйствительныя измѣренія фигуръ и тѣлъ представляютъ болѣе естественный и скорый методъ для усвоенія основныхъ геометри-

ческихъ истинъ. А разъ онъ истины эти усвоилъ и можетъ ими пользоваться, путь усвоенія становится безразличнымъ. Вѣдь „доказательства“ помнятъ одни учители, да и то имъ надо „приготовляться“ къ лекціямъ. Когда же въ старости учитель достигне.ь такого совершенства, что не нуждается ни въ какихъ приготовленіяхъ, тогда именно лекціи его и начинаютъ терять свое значеніе.

Главною цѣлью лекцій проф. Перри ставитъ не столько сообщеніе знаній, сколько сообщеніе умѣнія учиться. Факты и теоріи забываются скоро, если не примѣняются часто, но умѣющій учиться, добывать нужныя знанія изъ книгъ и опыта скоро справится, когда ему потребуются недостаточно знакомыя свѣдѣнія. Изъ лабораторныхъ занятій ученики должны вынести умѣніе наблюдать и изслѣдовать, правильно поставивъ вопросъ въ каждомъ частномъ случаѣ. Въ учебныхъ мастерскихъ они должны, главнымъ образомъ, узнать изъ собственнаго опыта свойства матеріаловъ, обусловливающія пріемы ихъ обработки и пригодность для различныхъ надобностей техники. Эта постановка вопроса едва-ли не нова; въ однихъ техническихъ училищахъ стараются выучить учениковъ хорошо работать, ч обыкновенно безуспѣшно, потому что для этого не хватаетъ времени, да и условія работы не тѣ, что въ настоящихъ мастерскихъ; въ другихъ довольствуются поверхностнымъ знакомствомъ съ пріемами работы. Между тѣмъ, рабочіе болѣе всего цѣнятъ въ своемъ техническомъ начальникѣ именно такое знаніе свойствъ матеріала, обусловливающихъ пріемы его обработки. Только такое знаніе даетъ возможность начальнику правильно оцѣнивать достоинство работы и давать дѣльныя указанія въ случаяхъ, требующихъ новыхъ, незнакомыхъ рабочимъ пріемовъ. А въ умѣніи пользоваться инструментами многіе рабочіе непремѣнно превзойдутъ своего руководителя, рѣдко берущаго инструментъ въ руки.

Направленіе нѣмецкихъ высшихъ техническихъ заведеній проф. Перри считаетъ нецѣлесообразнымъ и хочетъ идти далѣе. Нѣмцы, подражая природѣ, сѣютъ больше, чѣмъ можетъ взойти. Попадетъ сѣмя ученія на плодородную почву, и возрастетъ сторицею; если же почва окажется посредственною, и то не бѣда: выростетъ хотя кое-что. Однако, почвой служатъ въ этомъ случаѣ молодые люди, и отъ воспріятія чрезмѣрнаго количества пищи умственной становятся менѣе пригодны для полезной дѣятельности, чѣмъ стали бы при питаніи, болѣе соотвѣтственномъ ихъ прирожденнымъ силамъ. Поэтому Перри хочетъ начинать съ удобоваримой умственной пищи, не съ „горькихъ корней ученія“, а прямо со „сладкихъ его плодовъ“, сообщая всѣмъ сначала доступныя большинству умѣнья, изъ наукъ вытекающія, а затѣмъ уже давая доучиваться до высшихъ степеней знанія однимъ лишь способнымъ. Такимъ путемъ, очевидно, возможно достигнуть большого поднятія уровня техническихъ знаній въ странѣ съ меньшею напрасною затратою времени и труда, чѣмъ по германской системѣ. Не надо забывать, что огромному боль-

шинству техниковъ на дѣлѣ не представляется случаевъ примѣнять свои высшія знанія, а дѣйствовать приходится изо-дня въ день лишь по установившимся немногимъ правиламъ. Если они и знали когда-либо свою науку до самыхъ ея тонкостей, то при этихъ условіяхъ скоро ее позабудутъ; примѣнять-же ее достается на долю сравнительно немногихъ избранныхъ практиковъ и учителей. Этихъ учителей Перри тоже не забываетъ: онъ говоритъ, что въ Англіи ихъ вознагражденіе такъ ничтожно, что на эти мѣста идутъ преимущественно неудачники, которымъ практическая дѣятельность не далась. Между тѣмъ, дѣятельность такихъ учителей, какъ упомянутый выше І. І. Томсонъ, онъ считаетъ неоцѣнимой, и для привлеченія ихъ къ преподавательской дѣятельности совѣтуетъ не останавливаться ни предъ какими затратами.

Въ этой рѣчи проф. Перри констатируетъ, что дѣло преобразованія преподаванія начальной математики, начатое на основаніи преній въ сессіи предыдущаго года, пошло въ ходъ, и успѣхъ его уже обезпеченъ. На основаніи этого ораторъ предвидитъ въ ближайшемъ будущемъ новый періодъ процвѣтанія англійской промышленности, которая окончательно убьетъ промышленность болѣе отсталыхъ народностей: новое поколѣніе техниковъ будетъ лучше подготовлено къ своей спеціальности и правильно переустроитъ свои фабрики, а фабричныя устройства Германіи и Америки къ тому времени успѣютъ устарѣть.

Это новое направленіе преподаванія представляется настолько многообѣщающимъ и тѣмъ существенно отличается отъ господствующаго у насъ, что намъ, вѣроятно, предстоитъ еще разъ претерпѣть примѣненіе правила нашихъ заграничныхъ доброжелателей: „Россія должна всегда идти въ хвостѣ Европы“. Мы станемъ подражать ему, когда будетъ уже поздно.

Предѣлъ погрѣшности, совершаемой при вычисленіяхъ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ.

А. Киселева, въ Воронежѣ.

Нижеслѣдующее, изложенное съ нѣкоторыми измѣненіями и въ примѣненіи къ пятизначнымъ таблицамъ по „*Traité d'Algèbre élémentaire*“ *par N. Cor et J. Riemann* (Paris, 1898), даетъ отвѣтъ на вопросъ, какъ опредѣлить степень погрѣшности результата, полученнаго вычисленіемъ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ.

I. Предѣлъ погрѣшности при нахожденіи логариѳма даннаго числа.

Въ пятизначныхъ логариѳмическихъ таблицахъ *) даются 5 десятичныхъ знаковъ для мантиссы логариѳма всякаго цѣлаго числа, число цифръ котораго не болѣе 4-хъ; при этомъ 5-й десятичный знакъ мантиссы увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда 6-й десятичный знакъ оказался бы 5 или болѣе. Вслѣдствіе этого, пятизначныя таблицы даютъ для всякаго цѣлаго числа, не превосходящаго 10000, приближенный логариѳмъ *съ точностью до $^1/_2$ стотысячной доли.*

Съ тою же точностью таблицы даютъ логариѳмъ и для всякаго такого десятичнаго числа, которое, по отбрасываніи въ немъ запятой или нулей, стоящихъ на концѣ, превращается въ цѣлое число, содержащееся въ таблицахъ. Такъ, мантиссы логариѳмовъ чиселъ:

74,16 7,416 0,7416 741600

одинаковы, какъ извѣстно, съ мантиссою *log* 7416, и, если для этого цѣлаго числа таблицы даютъ приближенную мантиссу 87017 стотысячныхъ съ погрѣшностью до $^1/_2$ стотысячной, то и для написанныхъ выше чиселъ приближенная мантисса должна быть та же самая 87017 стотыс. съ тою же погрѣшностью до $^1/_2$ стотысячной.

Разсмотримъ теперь, какъ велика окажется погрѣшность въ томъ случаѣ, когда помощью таблицъ вычисляется логариѳмъ десятичнаго числа, которое, по отбрасываніи въ немъ запятой или нулей, стоящихъ на концѣ, обращается въ цѣлое число, выраженное болѣе, чѣмъ 4-мя цыфрами. Способъ полученія приближеннаго логариѳма такого числа, какъ извѣстно, слѣдующій.

Такъ какъ положеніе запятой въ десятичномъ числѣ не вліяетъ ни на величину приближенной мантиссы, ни на величину ея погрѣшности, то мы можемъ предположить, что въ данномъ десятичномъ числѣ запятая стоитъ послѣ 4-й цифры слѣва, т. е. что данное число имѣетъ видъ $n+h$, гдѣ n есть цѣлое число, выраженное 4-мя цыфрами, а h есть десятичная дробь, меньшая 1. Найдя съ помощью таблицъ мантиссу M, соотвѣтствующую числу n, и табличную разность d, мы будемъ имѣть:

Числа:	*Приближ. логариѳмы:*
n	$3+\frac{M}{10^5}$
$n+1$	$3+\frac{M+d}{10^5}$.

Допустивъ далѣе, что разности между логариѳмами пропор-

*) Напр., въ употребительныхъ у насъ таблицахъ *Е. Пржевальскаго.*

ціональны разностямъ между числами, мы получаемъ:

$$\frac{\log(n+h)-\log n}{\log(n+1)-\log n}=\frac{h}{1},$$

откуда: $\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]$ [1]

и слѣд., $\log(n+h)=\log n+h[\log(n+1)-\log n]=$

$$=3+\frac{M+hd}{10^5}.$$

Произведеніе hd рѣдко есть цѣлое число; бо́льшею частью оно есть цѣлое число съ дробью; въ этомъ случаѣ, такъ какъ мы довольствуемся 5-ю десятичнымя знаками мантиссы, вмѣсто точной величины произведенія hd мы беремъ *ближайшее* къ нему цѣлое число (если, напр., $h=0.26$ и $d=6$, то, вмѣсто произведенія $6.0,26=1,56$, мы беремъ ближайшее цѣлое число 2). Обозначивъ это цѣлое число черезъ δ, будемъ имѣть слѣдующую приближенную величину логариѳма даннаго числа:

$$\log(n+h)=3+\frac{M+\delta}{10^5}.$$

Предстоитъ теперь опредѣлить степень погрѣшности этого результата. Погрѣшность его обусловливается тремя причинами: 1) изъ таблицъ мы взяли не точные, а приближенные логариѳмы чиселъ n и $n+1$; 2) вмѣсто произведенія hd мы брали его приближенную величину δ и 3) равенство [1], которымъ мы пользовались выше, не вполнѣ вѣрно. Чтобы устранить всѣ эти причины, возьмемъ слѣдующія точныя равенства:

$$\left.\begin{aligned}\log n&=3+\frac{M+\alpha}{10^5}\\ \log(n+1)&=3+\frac{M+d+\alpha'}{10^5}\\ hd&=\delta+\alpha''\end{aligned}\right\}$$ гдѣ абсол. величины α, α' и α'' меньше $1/2$.

Съ другой стороны, помощью высшей математики, можетъ быть доказано, что, если $n\geqslant 1000$ и $h<1$, то равенство [1] въ

точномъ видѣ представится такъ:

$$\log(n+h)-\log n = h[\log(n+1)-\log n] + \frac{\beta}{10^5},$$

гдѣ абсолютная величина β меньше $^1/_{10}$ *).

Пользуясь этими точными равенствами, получимъ:

$$\log(n+h) = 3 + \frac{M+\alpha+h(d+\alpha'-\alpha)+\beta}{10^5}$$

$$= 3 + \frac{M+\delta}{10^5} + \frac{\alpha+\alpha''+h\alpha'-h\alpha+\beta}{10^5}.$$

Сравнивая эту точную величину съ найденной раньше приближенной величиной, находимъ, что погрѣшность приближенія равна

$$\frac{\alpha+\alpha''+h\alpha'-h\alpha+\beta}{10^5} = \frac{\alpha(1-h)+\alpha''+h\alpha'+\beta}{10^5}$$

и, слѣд., она меньше

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h+h)+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{10^5} = \frac{1+\frac{1}{40}}{10^5}.$$

Такимъ образомъ, оказывается, что, когда логариѳмъ даннаго числа не находится прямо въ таблицахъ, а получается изъ нихъ помощью общепринятаго вычисленія, погрѣшность результата не только не менѣе $^1/_2$ стотысячной, но даже нельзя ручаться, чтобы она была менѣе цѣлой стотысячной; однако, во всякомъ случаѣ она *менѣе* $1+{}^1/_{40}$ *стотысячной*.

---

*) Доказательство, изложенное на стр. 454 въ „*Traité d'Algèbre*" *par Cor et Rietann* въ примѣненіи къ семизначнымъ таблицамъ, въ которыхъ $n \geqq 10000$, можетъ быть вполнѣ примѣнимо къ случаю, когда $n \geqq 1000$; разница только та, что въ первомъ случаѣ дополнительный знакъ меньше $^1/_{40}$ *десятимилліонной*, тогда какъ во второмъ случаѣ онъ меньше $^1/_{40}$ *стотысячной*. Мы впрочемъ, приведемъ это доказательство здѣсь цѣликомъ.

Приводимъ вкратцѣ доказательство этого предложенія (*Cor et Rietann*— Traité d'Algèbre, p. 453):

Теорема. *Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, b) и имѣетъ производную $f'(x)$, также непрерывную въ этомъ промежуткѣ; если, кромѣ того, эта функція для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между a и b, имѣетъ еще вторую производную $f''(x)$; то существуетъ число c, заключенное между a и b, которое удовлетворяетъ соотношенію:*

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

Доказательства мы здѣсь не приводимъ, такъ какъ предыдущее равенство не что иное, какъ разложеніе выраженія $f(a+h)$ по строкѣ Тайлора съ остаткомъ, соотвѣтствующимъ двумъ членамъ разложенія $(h=b-a)$.

Слѣдствіе. *Если n есть число, не меньшее 10^3, и h число, заключенное между*

II. Предѣлъ погрѣшности при нахожденіи числа по данному логариѳму.

Предположимъ сначала, что характеристика даннаго логариѳма есть 3. Находимъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу M, табличную разность d и разность Δ между данной мантиссой и ближайшей меньшей, взятой изъ таблицъ. Тогда будемъ имѣть:

Приближ. логариѳмы: *Числа:*

$$3+\frac{M}{10^5}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;n$$

$$3+\frac{M+d}{10^5}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;n+1$$

$$3+\frac{M+\Delta}{10^5}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;n+h.$$

---

0 и 1, то въ равенствѣ (гдѣ знакъ *log* обозначаетъ десятичный логариѳмъ):

$$\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]+\frac{\beta}{10^5}$$

абс. величина β *меньше* $\frac{1}{40}$.

(Мы выражаемъ это слѣдствіе не такъ, какъ оно выражено у *Cor et Riemann* въ примѣненіи къ таблицамъ 7-изначныхъ логариѳмовъ, въ которыхъ $n\geqslant 10^4$, а въ примѣненіи къ 5-изначнымъ таблицамъ, въ которыхъ $n\geqslant 10^3$).

Док. Обозначивъ для краткости:

$$A=\log(n+h)-\log n=\log\left(1+\frac{h}{n}\right)=ML\left(1+\frac{h}{n}\right)$$

$$B=\log(n+1)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=ML\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

гдѣ L означаетъ натуральный логариѳмъ и M модуль, служащій для перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ десятичнымъ, будемъ имѣть:

$$\beta=10^5[A-hB].$$

Примѣняя изложенную выше теорему къ функціи $L(1+x)$ сначала для промежутка $\left(0,\frac{h}{n}\right)$, а потомъ для $\left(0,\frac{1}{n}\right)$, находимъ, что существуютъ *положительныя* числа x_1 и x_2, при которыхъ:

$$L\left(1+\frac{h}{n}\right)=\frac{h}{n}-\frac{h^2}{2n^2(1+x_1)^2}$$

$$L\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2(1+x_2)^2}$$

и слѣд., $$\beta=10^5.M.\frac{h}{2n^2}\left[\frac{1}{(1+x_2)^2}-\frac{h}{(1+x_1)^2}\right];$$

Такъ какъ абсол. вел. числа, стоящаго въ скобкахъ, меньше 1, то

$$|\beta|<10^5.M.\frac{h}{2n^2}.$$

Такъ какъ $M=0{,}4342\ldots$, то $M<\frac{44}{100}$; съ другой стороны, $h<1$ и $n\geqslant 10^3$; значитъ:

$$|\beta|<10^5.\frac{44}{100}.\frac{1}{2.10^6}=\frac{22}{1000}\text{ и }|\beta|<\frac{1}{40}.$$ Что и тр. док.

Предстоитъ найти h. Изъ приближеннаго равенства:

$$\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]$$

находимъ: $\frac{\Delta}{10^5}=\frac{hd}{10^5}$; откуда: $h=\frac{\Delta}{d}$

и, слѣд., искомое число будетъ:

$$n+\frac{\Delta}{d}.$$

Не обращая пока дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, опредѣлимъ погрѣшность найденнаго приближенія. Для этого возьмемъ точныя равенства:

Точные логариѳмы:	*Числа:*
$3+\frac{M+\alpha}{10^5}$	n
$3+\frac{M+d+\alpha'}{10^5}$	$n+1$
$3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5}$	$n+h$

и

$$\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]+\frac{\beta}{10^5},$$

гдѣ (обозначая заключеніемъ въ скобки числа его абсол. величину):

$$|\alpha|<\frac{1}{2}\quad |\alpha'|<\frac{1}{2}\quad |\beta|<\frac{1}{40}$$

и ω есть число стотысячныхъ, содержащееся въ погрѣшности даннаго приближеннаго логариѳма. Подставляя въ послѣднее изъ этихъ равенствъ точныя величины логариѳмовъ, находимъ (по отбрасываніи общаго знаменателя 10^5):

$$\Delta+\omega-\alpha=h(d+\alpha'-\alpha)+\beta,$$

откуда:

$$h=\frac{\Delta+\omega-\alpha-\beta}{d+\alpha'-\alpha}.$$

И, слѣд., погрѣшность, совершаемая тогда, когда вмѣсто точной величины h беремъ найденное выше приближенное значеніе $\frac{\Delta}{d}$, равна:

$$\frac{\Delta+\omega-\alpha-\beta}{d+\alpha'-\alpha}-\frac{\Delta}{d}=\frac{d\omega-d\alpha-d\beta-\Delta\alpha'+\Delta\alpha}{(d+\alpha'-\alpha)d}=$$

$$=\frac{d\omega-\alpha(d-\Delta)-d\beta-\Delta\alpha'}{(d+\alpha'-\alpha)d}$$

и, слѣд., она меньше:

$$\frac{d|\omega|+\frac{1}{2}(d-\Delta+\Delta)+d\cdot\frac{1}{40}}{\left(d-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)d}=\frac{|\omega|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}$$

Величина эта превосходитъ $^1/_{100}$. Дѣйствительно, она, очевидно, больше числа:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}=\frac{21}{40(d-1)},$$

которое, въ свою очередь, больше $^1/_{100}$, такъ какъ изъ равенства:

$$\frac{21}{40(d-1)}>\frac{1}{100}$$

находимъ: $d-1<\frac{2100}{40}$; $d<53\frac{1}{2}$;

что имѣетъ мѣсто на всемъ протяженіи пятизначныхъ таблицъ, въ которыхъ наибольшее значеніе d есть 44.

Итакъ, беря для искомаго числа приближенное значеніе $n+\frac{\Delta}{d}$, мы не можемъ быть увѣрены, что ошибка меньше $^1/_{100}$. Поэтому, обращая дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, безполезно находить цыфры сотыхъ и слѣдующихъ низшихъ долей, а *достаточно ограничиться одною цыфрою десятыхъ.* Если при этомъ мы имѣемъ предосторожность брать *ближайшую* цыфру десятыхъ (т. е. увеличивать цыфру десятыхъ на 1 всякій разъ, когда цыфра сотыхъ была бы 5 или болѣе), то, отбрасывая въ десятичной дроби, получаемой отъ обращенія $\frac{\Delta}{d}$, разряды, слѣдующіе за десятыми долями, мы совершаемъ еще ошибку, меньшую $^1/_2$ десятой, т. е. меньшую $^1/_{20}$; и тогда окончательная погрѣшность найденнаго числа будетъ менѣе

$$\frac{|\omega|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}+\frac{1}{20}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $|\omega|=0$, т. е. когда данный логариѳмъ есть точный, погрѣшность окажется менѣе

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}+\frac{1}{20}.$$

Число это меньше $^1/_{10}$ только въ томъ случаѣ, когда $d\geqslant 12$. Значитъ, только въ этомъ случаѣ и при томъ, когда данный логариѳмъ точенъ, мы можемъ ручаться, что цыфра десятыхъ, полученная отъ дѣленія Δ на d, окажется вѣрною; въ общемъ случаѣ и за это ручаться нельзя.

Мы предполагали до сего времени, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, и что, слѣд., въ искомомъ десятичномъ числѣ запятая стоитъ послѣ 4-й цыфры слѣва. Когда характеристика будетъ иная, то въ найденномъ выше числѣ запятую придется перенести влѣво или вправо, т. е. раздѣлить число или умножить его на нѣкоторую степень 10-и. При этомъ, конечно, погрѣшность результата также раздѣлится или умножится на ту же степень 10-и.

Приложимъ все сказанное къ слѣдующему примѣру, на которомъ, между прочимъ, мы увидимъ, что, сверхъ указанныхъ выше неточностей, приходится иногда вводить и другія.

Примѣръ. *Вычислить выраженіе:*

$$x = \frac{A^2 \sqrt[3]{B}}{\sqrt[4]{C}},$$

если $A = 32{,}41275$, $B = 7{,}185363$ *и* $C = 6791{,}824$.

Вспомогательныя вычисленія:

1. Вычисленіе $\log A^2$.

3241 . . . . 51068 (13)
2 26
7 91
5 65

$\log 32{,}41275 = 1{,}51071$
$\log A^2 = 3{,}02142$

2. Вычисленіе $\log \sqrt[3]{B}$.

7185 . . . 85643 (6)
3 18
6 36
3 18

$\log 7{,}185363 = 0{,}85645$
$\log \sqrt[3]{B} = 0{,}28548$

3. Вычисленіе *доп.* $\log \sqrt[4]{C}$.

6791 . . . 83193 (7)
8 56
2 14
4 28

$\log 6791{,}824 = 3{,}83199$
$\log \sqrt[4]{C} = 0{,}9579(10)$
$= 0{,}95800$
доп. $\log \sqrt[4]{C} = \bar{1}{,}04200$

Окончательныя вычисленія:

$\log A^2 = 3{,}02142$
$\log \sqrt[3]{B} = 0{,}28548$
доп. $\log \sqrt[4]{C} = \bar{1}{,}04200$

$\log x = 2{,}34890$
$\log x_1 = 3{,}34890$
$\log 2233 = 3{,}34889 \quad (d = 19)$
$0{,}1 \ . \ . \ . \ ^1/_{19}$

$x_1 = 2233{,}1$
$x = 223{,}31$

Найдемъ сначала предѣлъ погрѣшности числа x_1. Для этого

предварительно надо найти предѣлъ погрѣшности ω приближеннаго $log\,x_1$, или — что все равно — $log\,x$.

Предѣлы погрѣшности:

въ $log\,A$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ стотысячной

въ $log\,A^2$ . . . . $\left(2+\frac{1}{20}\right)$ "

въ $log\,B$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ "

въ $log\sqrt[3]{B}$ . . . . . $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ "

Въ послѣдней строкѣ мы прибавили $^1/_2$, такъ какъ, дѣля $log\,B$ на 3, мы отбросили цыфры, слѣдующія за стотысячными долями, изъ которыхъ первая меньше 5. По той же причинѣ ниже прибавлена $^1/_2$ къ погрѣшности въ $log\sqrt[4]{C}$.

Въ $log\,C$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ стотысячной

въ $log\sqrt[4]{C}$ . . . . . $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ "

въ доп. $log\sqrt[4]{C}$ . . . . $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ "

Предѣлъ погрѣшности въ $log\,x_1$ (въ стотысячныхъ доляхъ):

$$2+\frac{1}{20}+\frac{1}{3}+\frac{1}{120}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{160}+\frac{1}{2}=3\frac{311}{480}<3\frac{3}{4}.$$

Предѣлъ погрѣшности въ x_1 меньше:

$$\frac{3\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{19-1}+\frac{1}{20}=\frac{4\frac{11}{40}}{18}+\frac{1}{20}=\frac{171}{720}+\frac{1}{20}=\frac{207}{720}=0{,}29<0{,}3.$$

Такъ какъ x въ 10 разъ меньше x_1, то предѣлъ погрѣшности въ x также въ 10 разъ меньше предѣла погрѣшности въ x_1, т. е. онъ меньше

0,03,

и потому величина x заключается въ предѣлахъ:

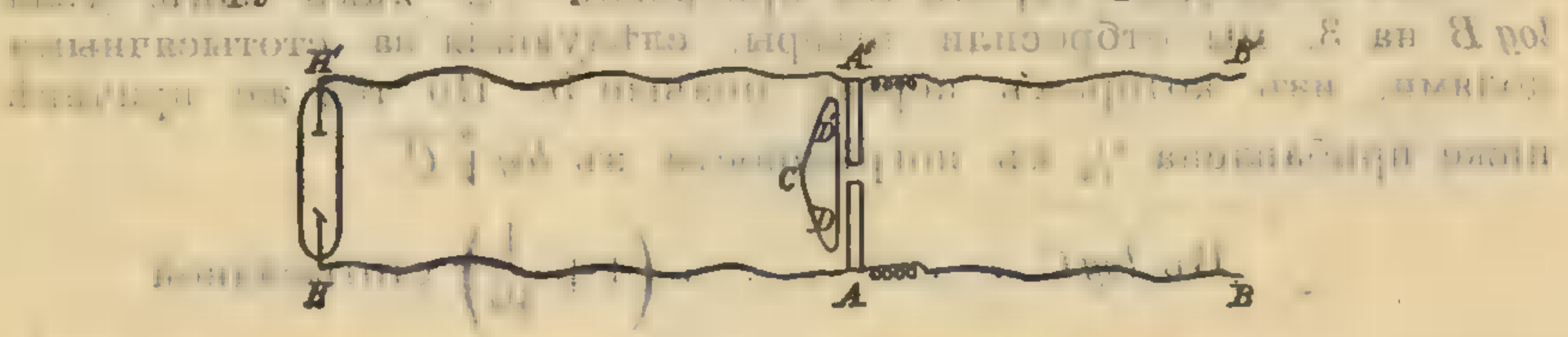
$$223{,}34>x>223{,}28.$$

Опредѣленіе скорости распространенія X-лучей.

Въ 339 номерѣ „Вѣстника" уже упоминалось о замѣчательныхъ опытахъ R. Blondlot, опубликованныхъ въ „Comptes Rendus" *), надъ опредѣленіемъ скорости распространенія x-лучей. Здѣсь мы даемъ вкратцѣ описаніе метода Blondlot и результатовъ, имъ полученныхъ.

Послѣ долгихъ безплодныхъ попытокъ найти скорость распространенія x-лучей, Blondlot пришло на мысль воспользоваться принципомъ, напоминающимъ тотъ, который употребилъ Roemer для опредѣленія скорости свѣта. Способъ Blondlot сводится къ слѣдующему.

Отъ полюсовъ B, B′ катушки Румкорфа идутъ двѣ горизонтальныя параллельныя проволоки къ электродамъ H и H′ Рентгеновской трубки. (См. черт. 1). Не доходя до трубки, эти прово-



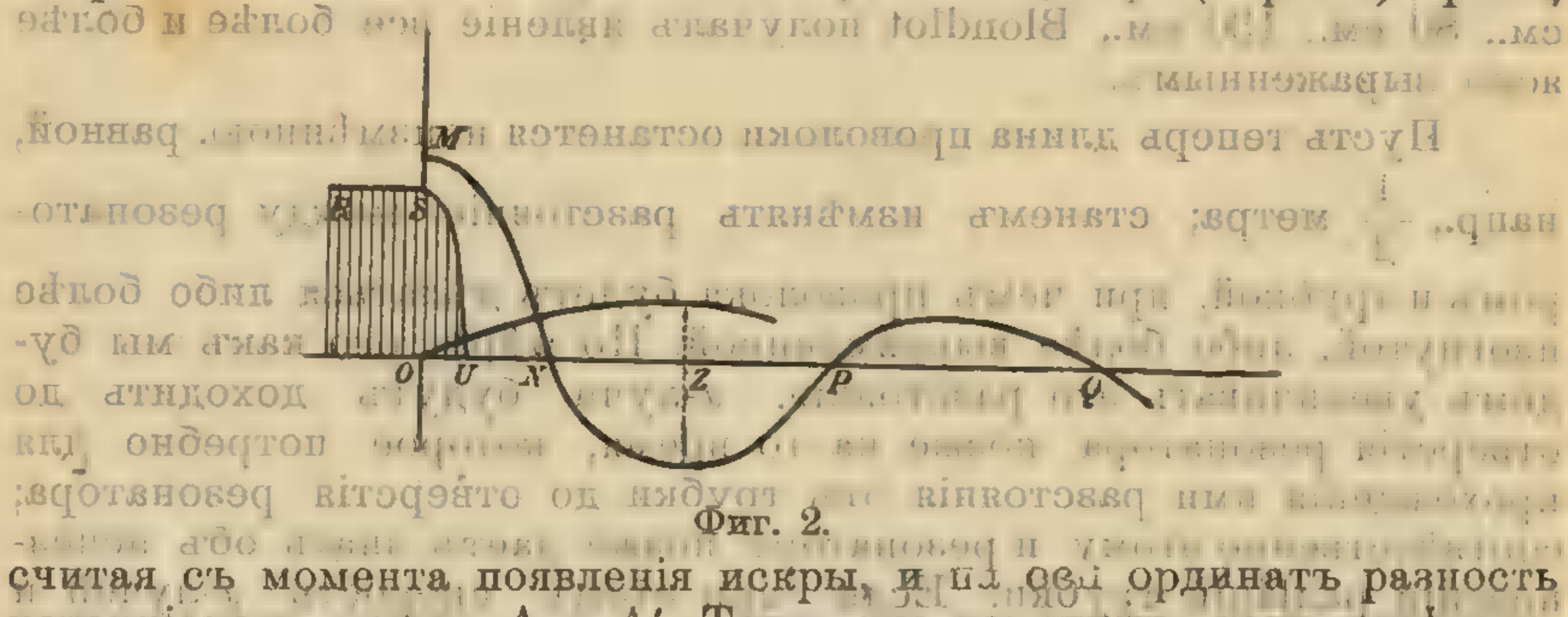
Фиг. 1.

локи соединяются съ вибраторомъ Hertz'a, состоящимъ изъ двухъ латунныхъ цилиндровъ A и A′ діаметромъ около 0,8 сант. и 6 сант. длины, расположенныхъ горизонтально въ коробкѣ съ вазелиновымъ масломъ. Подъ этой коробкой (на чертежѣ не обозначенной) находится резонаторъ, образованный согнутой мѣдной проволокой DD′C. (На чертежѣ резонаторъ помѣщенъ рядомъ съ вибраторомъ, въ дѣйствительности же прямолинейная часть его DD′ находится прямо подъ AA′). Искровой промежутокъ C обращенъ къ трубкѣ, лучи которой должны быть получены резонаторомъ. Отъ постороннихъ излученій онъ отгороженъ экраномъ изъ зачерченной бумаги и аллюминіеваго листа.

При соотвѣтственномъ регулированіи разстоянія между цилиндрами A и A′ вибратора, можно достигнуть того, что потенціалъ, необходимый для дѣйствія трубки, будетъ немного меньше, чѣмъ потенціалъ, при которомъ появляется искра въ вибраторѣ. Тогда мы получаемъ слѣдующее: при всякомъ токѣ размыканія въ катушкѣ между H и H′ получается разность потенціаловъ, достаточная для приведенія въ дѣйствіе трубки; разность потенціаловъ растетъ до тѣхъ поръ, пока въ вибраторѣ не проскакиваетъ искра; тогда токъ перестаетъ проходить черезъ трубку, ограничиваясь лишь вибраторомъ; трубка тухнетъ, а въ вибраторѣ происходитъ колебательный разрядъ.

*) 135, 166, 1902 г.

Пусть проволоки AH и AH′ сдѣланы по возможности короткими и трубка помѣщена очень близко отъ вибратора (0,11 метра). Станемъ откладывать на оси абсциссъ (черт. 2) время,



Фиг. 2.

считая съ момента появленія искры, и на оси ординатъ разность потенціаловъ между A и A′. Тогда мы получимъ, какъ извѣстно, быстро затухающую синусоиду MNPQ. Какъ мы видѣли, аппаратъ установленъ такимъ образомъ, что трубка прекращаетъ свое дѣйствіе, лишь только, вслѣдствіе колебательнаго разряда въ вибраторѣ, разность потенціаловъ между H и H′ немного уменьшится, т. е. черезъ промежутокъ времени, меньшій четверти періода колебанія вибратора. Поэтому кривая силы рентгеновскихъ лучей будетъ состоять изъ почти горизонтальной части RS, соотвѣтствующей времени до появленія искры въ вибраторѣ, и круто падающей части SU. Длина волны вибратора равнялась 1,14 м., періодъ ея $= \frac{114}{3.10^{10}}$ сек., слѣдовательно, OU значительно меньше, чѣмъ $\frac{114}{3.10^{10}.4}$ сек.

Построимъ теперь кривую для резонатора. За ординаты примемъ разность потенціаловъ на искровомъ промежуткѣ резонатора, возбуждаемую разрядомъ вибратора. Ордината $= 0$, пока весь разрядъ идетъ черезъ трубку, т. е. вплоть до времени, принятаго нами за начало координатъ. Maximum достигается, какъ извѣстно, при перемѣнѣ знака заряда вибратора, т. е. въ концѣ половины періода,—времени, которое на оси абсциссъ обозначено OZ. Изъ этого слѣдуетъ, что когда резонаторъ приходитъ въ дѣйствіе, *x*-лучи уже потухли, а потому труба не будетъ тогда оказывать никакого вліянія на искру резонатора. Справедливость этого подтверждается опытнымъ путемъ: если помѣстить свинцовый листъ между трубкой и отверстіемъ резонатора, то искра не измѣняетъ своего вида.

Если мы *оставимъ* приборы *на прежнемъ мѣстѣ*, а короткія проволоки AH и A′H′ замѣнимъ новыми, по 25 сант. длиной каждая, изогнутыми соотвѣтственно разстоянію AH, то такое удлиненіе замедлитъ потуханіе *x*-лучей на время, которое необходимо для прохожденія гертцовскими волнами вдоль проволоки разстоянія въ (25—11) сант. $=$ 14 сант.; вслѣдствіе этого, *x*-лучи дойдутъ до резонатора въ моментъ появленія тамъ искры и окажутъ вліяніе на видъ ея; это и было обнаружено на опытѣ, гдѣ помѣщеніе

между трубкой и резонаторомъ свинцоваго листа дѣлало искру слабѣе. Съ увеличеніемъ длины проволоки, это дѣйствіе x-лучей усиливается. Употребляя попеременно проволоки длиной въ 33 см., 80 см., 130 см., Blondlot получалъ явленіе все болѣе и болѣе ясно выраженнымъ.

Пусть теперь длина проволоки останется неизмѣнною, равной, напр., $\frac{1}{2}$ метра; станемъ измѣнять разстояніе между резонаторомъ и трубкой, при чемъ проволока будетъ дѣлаться либо болѣе изогнутой, либо болѣе выпрямленной. По мѣрѣ того какъ мы будемъ увеличивать это разстояніе, x-лучи будутъ доходить до отверстія резонатора позже на то время, которое потребно для прохожденія ими разстоянія отъ трубки до отверстія резонатора; соотвѣтственно этому и резонаторъ позже даетъ знать объ исчезновеніи радіацій трубки. Если при этомъ скорость x-лучей и гертцовскихъ волнъ одного порядка, то удаленіе трубки должно произвести тотъ же эффектъ, что и удлиненіе проволоки, т. е. усилится дѣйствіе лучей Roentgen'а на видъ искры. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему парадоксальному выводу: трубка должна сильнѣе дѣйствовать въ отдаленіи, чѣмъ вблизи. Какъ бы это ни казалось страннымъ съ перваго взгляда, однако это было вполнѣ доказано Blondlot на опытѣ; чѣмъ дальше была трубка, тѣмъ ярче дѣлалась искра—это былъ фактъ, не подверженный никакому сомнѣнію. Несомнѣннымъ являлось и то, что увеличеніе яркости происходило на счетъ x-лучей, ибо свинцовый листъ, помѣщенный между трубкой и отверстіемъ резонатора, вызывалъ, ceteris paribus, ослабленіе искры. Этотъ неожиданный результатъ даетъ уже намъ право считать скорость x-лучей близкою къ скорости гертцевскихъ волнъ.

Возьмемъ теперь проволоку большей длины, напр., 80 сант. Удаляя трубку, можно получить такое разстояніе, при которомъ дѣйствіе x-лучей на отверстіе резонатора будетъ наибольшимъ. Очевидно, что такой maximum долженъ существовать, хотя бы уже вслѣдствіе поглощенія x-лучей средою. Поэтому долженъ наконецъ наступить моментъ, когда дальнѣйшее удаленіе трубки отъ отверстія ослабляетъ дѣйствіе x-лучей. При длинѣ проволоки въ 80 сант. maximum въ опытѣ Blondlot наступалъ при разстояніи между трубкой и резонаторомъ въ 53 сант. Обозначимъ черезъ $V \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$ и $V' \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$ скор. гертцевскихъ волнъ и x-лучей.

Оставляя разстояніе въ 53 сант. неизмѣннымъ, удлинимъ провода на α сант.; этимъ замедлится еще на $\frac{\alpha}{V}$ прекращеніе дѣйствія x-лучей на резонаторъ; maximum перейденъ и, чтобы опять вернуться къ нему, нужно компенсировать удлиненіе проволокъ, приблизивъ трубку на разстояніе β, при чемъ β войдетъ въ уравненіе: $\frac{\beta}{V'} = \frac{\alpha}{V}$. Отношеніе α и β намъ извѣстно; слѣдовательно, извѣстно и отношеніе $\frac{V'}{V}$.

Рядъ опытовъ, въ которыхъ α варьировалось въ такихъ широкихъ предѣлахъ, насколько это только было возможно, далъ $\beta = \alpha$. Отсюда слѣдовало, что $V' = V$. Серія опытовъ, производившихся при длинѣ проволоки, равной 80 сант., дала $\frac{V'}{V} = \frac{161,7}{162,5}$. Опыты производились самимъ Blondlot и его помощникомъ M. Virtz'емъ, при чемъ β при одномъ и томъ же α вычислялось какъ среднее изъ пяти наблюденій.

Другія серіи опытовъ дали $\frac{V'}{V} = \frac{138}{139}, \frac{146}{144}$ и т. д. — величины, если принять во вниманіе неточности въ опредѣленіи maximum'а, очень близкія къ единицѣ. Въ общемъ, можно считать $\frac{V'}{V} = 0,97$; отдѣльныя измѣренія давали тамъ и здѣсь значительныя уклоненія, но при выводѣ средней величины изъ большого числа наблюденій они оказались незамѣтными.

Blondlot воспользовался и другимъ способомъ для опредѣленія $\frac{V'}{V}$. Въ описанныхъ нами опытахъ компенсировалось время, потребное для прохожденія x-лучами опредѣленнаго пути, временемъ, которое употребляютъ электромагнитныя волны, чтобы пройти соотвѣтствующей длины проволоку. Здѣсь же Blondlot удлинялъ и укорачивалъ не проволоки AH и A'H', а проволоку резонатора. Къ концамъ послѣдняго, которые отстоятъ одинъ отъ другого приблизительно на 3 мм., припаяны двѣ проволоки въ видѣ маленькихъ придатковъ. Къ концамъ этихъ проволокъ придѣланъ искромѣръ; новое отверстіе резонатора помѣщается на мѣсто перваго, куда и загибаются припаянныя проволоки. Дѣйствіе вибратора вызываетъ здѣсь герцевскія волны, которыя должны пройти по проволокѣ нѣкоторый путь, чтобы попасть въ отверстіе резонатора и вызвать тамъ искру. Если мы такимъ образомъ удлинимъ каждую половину резонатора на a сант., то искра образуется позже на $\frac{a}{V}$ сек. и, чтобы получить maximum искры, надо увеличить разстояніе между трубкой и резонаторомъ на b сант., гдѣ $\frac{b}{V'} = \frac{a}{V}$. Найдя величину $\frac{b}{a}$, получимъ $\frac{V'}{V}$. По этому способу также произведены были многочисленные опыты, при чемъ a колебалось отъ 0 до 25 сант. Оказалось, что $\frac{V'}{V} = 0,93$. Эта величина находится въ полномъ соотвѣтствіи съ результатами опытовъ по первому способу, повидимому, болѣе цѣнному, нежели второй, дающій менѣе надежные результаты.

Во всякомъ случаѣ, уже теперь можно сказать, что *скорость распространенія x-лучей равняется скорости распространенія герцевскихъ волнъ, а слѣдовательно, и скорости свѣта въ воздухѣ*, т. е. — 300 тыс. килом. въ секунду.

Маятникъ Фуко.

„Математическая географія“ въ реальныхъ училищахъ, „космографія“ въ гимназіяхъ,—а проще, „начала астрономіи“,—представляетъ предметъ, программа и изложеніе котораго далеко еще не выработаны; имѣющіеся учебники,—слѣдуетъ сознаться,—далеки отъ совершенства. Поэтому, всякая попытка изложить тотъ или другой вопросъ, трактуемый на урокахъ этого предмета, мнѣ кажется, вполнѣ желательна.

Маятникъ Фуко, какъ доказательство суточнаго вращенія земли, является однимъ изъ такихъ вопросовъ, весьма важныхъ по своему значенію, но неудовлетворительно разбираемыхъ въ учебникахъ. Обычное, почти во всѣхъ руководствахъ по космографіи повторяющееся разъясненіе его требуетъ допущенія, что одна и та же дуга описана двумя различными радіусами,—допущеніе совершенно непонятное для учениковъ. Помѣщенное въ № 335 „В. Оп. Ф. и Эл. М.“ изложеніе этого же вопроса г. Волкова, хотя и интересно само по себѣ, но не можетъ быть введено въ курсъ, такъ какъ, съ одной стороны, требуетъ умѣнія рѣшать сферическіе треугольники, а съ другой, не свободно и отъ допущеній, вообще мало понятныхъ ученикамъ (допущеніе о минимальности угла отклоненія плоскости качанія).

Но въ этой же статьѣ г. Волкова, въ самомъ началѣ, указывается, что „лучшее изложеніе маятника Фуко дается въ курсахъ аналитической механики и основано на разложеніи вращеній“. Нельзя не согласиться съ авторомъ, что разложеніе вращеній—лучшій способъ изложенія. Но не слѣдуетъ, мнѣ кажется, относить этотъ способъ къ курсамъ аналитической механики, такъ какъ сложеніе (а слѣд., и разложеніе) равномѣрныхъ вращательныхъ движеній можетъ быть изложено элементарно, какъ, напримѣръ, это сдѣлано въ лекціяхъ проф. О. Хвольсона „Ученіе о движеніи и о силахъ“ (Спб. 1903).

Разсуждая подобно тому, какъ это сдѣлано въ указанной сейчасъ книгѣ проф. Хвольсона, но разбирая только одинъ частный случай сложенія равномѣрныхъ вращеній, необходимый для рѣшенія вопроса о маятникѣ Фуко, легко докажемъ слѣдующую теорему [1]).

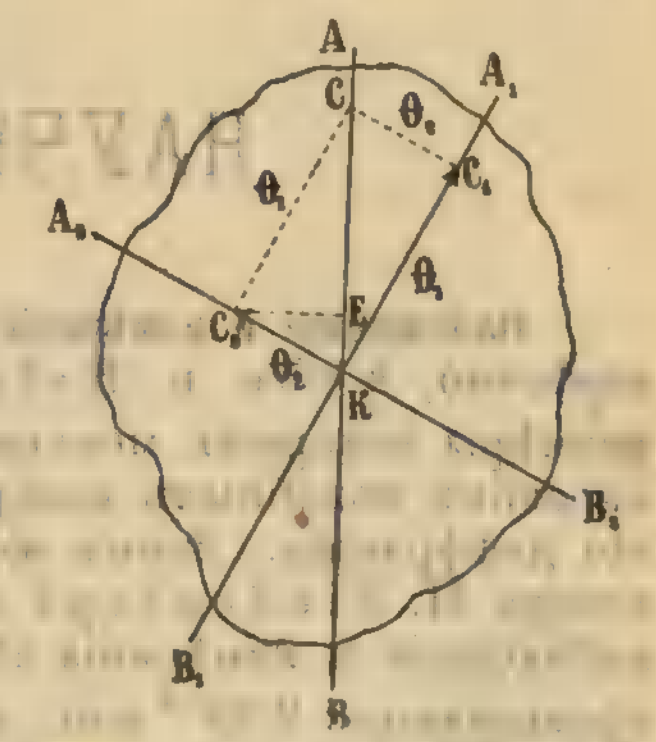
Теорема. *Два равномѣрныя вращательныя движенія твердаго тѣла около пересѣкающихся взаимно-перпендикулярныхъ осей складываются въ одно вращательное движеніе, также равномѣрное, при чемъ, во-1-хъ, ось*

---

[1]) Предварительно, конечно, должно быть дано опредѣленіе равномѣрнаго вращательнаго движенія и угловой скорости, а также выведены двѣ формулы $\theta.T=2\pi$ и $v=\theta.r$, гдѣ v скорость точки тѣла, находящейся отъ оси вращенія на разстояніи r, θ—угловая скорость тѣла, T—періодъ полнаго оборота.

этого движенія совпадаетъ по направленію съ діагональю параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ, численно равныхъ даннымъ угловымъ скоростямъ и отложенныхъ на соотвѣтствующихъ имъ осяхъ отъ точки пересѣченія послѣднихъ [2]), *и, во-2-хъ, угловая скорость этого движенія численно равна указанной діагонали.*

Укажемъ вкратцѣ ходъ доказательства. На чертежѣ MN — данное твердое тѣло, A_1B_1 и A_2B_2 оси двухъ данныхъ вращательныхъ движеній съ угловыми скоростями θ_1 и θ_2, KC_1CC_2 —указанный въ теоремѣ параллелограммъ ($C_1K = CC_2 = \theta_1$, $C_2K = CC_1 = \theta_2$).



Разбирая скорости v_1 и v_2, которыя имѣла бы точка C, если бы существовало только одно изъ двухъ данныхъ вращательныхъ движеній, видимъ, что эти скорости по направленіямъ своимъ прямо противоположны (перпендикулярны къ плоскости чертежа, направлены v_1—отъ насъ, v_2—на насъ), по величинѣ же равны между собою, ибо $v_1 = \theta_1.CC_1 = \theta.\theta_2$ а $v_2 = \theta_2.CC_2 = \theta_2.\theta_1$. Отсюда заключаемъ, что точка C должна оставаться неподвижною, а такъ какъ и точка K неподвижна, то прямая KC или, что то же, прямая AB—неподвижна, такъ какъ разсматривается твердое тѣло, не допускающее сдвиженія одной точки относительно другой. Такимъ образомъ доказывается первая часть теоремы. Для доказательства второй части называемъ угловую скорость „равнодѣйствующаго“ вращательнаго движенія θ и разсматриваемъ точку C_2 (или C_1); скорость ея, въ силу даннаго, равна $\theta_1.C_2K$, а, въ силу доказаннаго въ первой части теоремы, должна быть равна $\theta.C_2E$. Поэтому, $\theta_1.C_2K = \theta.C_2E$, откуда $\theta = \frac{\theta_1.C_2K}{C_2E}$. Не трудно убѣдиться, что $\frac{C_2K}{C_2E} = \frac{CK}{\theta_1}$, послѣ чего найдемъ: $\theta = CK$.

Такимъ образомъ теорема о сложеніи двухъ равномѣрныхъ вращательныхъ движеній доказывается въ томъ случаѣ, какой мы выбрали. Для примѣненія ея къ объясненію маятника Фуко слѣдуетъ идти обычнымъ путемъ; разбирать явленіе, какъ оно происходило бы на полюсѣ и на экваторѣ, а затѣмъ, переходя къ точкѣ, расположенной подъ широтою φ, разложить вращеніе земли, съ угловою скоростью θ, равною 15^0 въ часъ, на два,—для одного изъ нихъ ось направить черезъ разсматриваемую точку (угловая скорость $\theta_1 = \theta.\sin\varphi$), а для другого—перпендикулярно

---

[2]) Относительно направленія, по которому откладывать отрѣзки, слѣдуетъ держаться того правила, чтобы для наблюдателя, расположеннаго по этому направленію, вращеніе представлялось происходящимъ слѣва-направо.

къ первому (угловая скорость $\theta_2=\theta.\cos\varphi$),—и затѣмъ разсмотрѣть каждое изъ этихъ двухъ вращательныхъ движеній.

Въ такомъ видѣ разборъ маятника Фуко вполнѣ строгъ и, тѣмъ не менѣе, доступенъ пониманію учениковъ средней школы.

Вл. Ал. Егуновъ. (Спб.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Наблюденіе и измѣреніе ультрамикроскопическихъ частичекъ. Какъ извѣстно, Abbe и Helmholtz доказали, что тѣла, линейные размѣры которыхъ меньше 2.10^{-4} mm., не могутъ давать въ микроскопѣ подобныхъ изображеній. Причиною этого служитъ явленіе диффракціи. Этимъ же самымъ явленіемъ воспользовались теперь H. Siedentopf и R. Zsigmondy для новой методы наблюденія и измѣренія тѣлецъ, линейные размѣры которыхъ не превышаютъ 2.10^{-4} mm., и которые поэтому эти физики предлагаютъ называть *ультрамикроскопическими* *). Изслѣдованію подверглись такъ называемыя рубиновыя стекла, т. е. стекла, окрашенныя золотомъ. Золотыя крупинки въ нихъ ультрамикроскопическія, но разстоянія между ними могутъ быть различены въ микроскопѣ. Если бы эти крупинки свѣтились весьма сильно, то онѣ могли бы поэтому дать въ микроскопѣ изображеніе, которое, правда, не можетъ быть подобнымъ изображаемому объекту. На самомъ дѣлѣ частички эти не свѣтятся съ достаточной силой, и ихъ необходимо освѣщать солнечнымъ или сильнымъ электрическимъ свѣтомъ. Когда черезъ щель въ ставнѣ проникаетъ въ комнату яркій лучъ свѣта и мы смотримъ на него подъ прямымъ угломъ, то замѣчаемъ въ воздухѣ пылинки, которыхъ при иныхъ условіяхъ не замѣчаемъ. На этомъ принципѣ основанъ пріемъ Siedentopf'a и Zsigmondy. Освѣтивъ рубиновое стекло сильнымъ горизонтально идущимъ лучемъ, они разсматриваютъ его черезъ весьма сильный микроскопъ, расположенный вертикально; тогда въ полѣ зрѣнія получается *не* подобное изображеніе золотыхъ крупинокъ. А именно, диффракціонные конусы, получающіеся у каждой изъ этихъ крупинокъ, даютъ въ полѣ зрѣнія микроскопа пятна, размѣры которыхъ, несмотря на ихъ малость, могутъ быть измѣрены. Основанное на этомъ наблюденіи вычисленіе даетъ нижній предѣлъ для линейныхъ размѣровъ крупинокъ золота еще видимыхъ *6.10^{-6} mm., т. е. величину, не значительно превосходящую діаметръ молекулъ.*

*) См. *Ann. d. Phys.*, IV Folge, Bd. 10; (1903, № 1); p 1 ff.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Назначеніе проф. Tammann'a.—G. Tammann, до сихъ поръ профессоръ Юрьевскаго Университета, назначенъ профессоромъ химіи Геттингенскаго Университета.

Избранія. — Парижская Академія Наукъ избрала, на мѣсто скончавшагося Rowland'a, членомъ корреспондентомъ по секціи физики René Benoît. — Бельгійская Академія въ Брюсселѣ избрала членами корреспондентами P. Duhem'a, проф. въ Бордо, и H. Poincaré, проф. въ Парижѣ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 310 (4 сер.). Опредѣлить maximum функціи

$$u = \sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y)$$

при условіи

$$\sin^2 + \sin^2 y = m,$$

гдѣ m—данное число.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 311 (4 сер.). Преобразовать выраженіе

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^{16}\varphi + \sin^{16}\varphi + \cos^2 2\varphi)}$$

въ другое, не содержащее радикала.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 312 (4 сер.). Построить окружность, касающуюся равныхъ сторонъ AB и AC равнобедреннаго треугольника ABC и дѣлящую основаніе его BC на три равныя части.

І. Ѳеодоровъ (Спб.).

№ 313 (4 сер.). Найти общій видъ цѣлыхъ чиселъ N, удовлетворяющихъ условію, чтобы число $\sqrt{N}-a$, гдѣ a—приближенный корень квадратный изъ N съ недостаткомъ съ точностью до единицы, обращалось въ непрерывную дробь, имѣющую четыре частныхъ въ періодѣ, первыя три изъ которыхъ суть 1, 3, 1.

Н. С. (Одесса).

№ 314 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}.$$

(Заимств.).

№ 315 (4 сер.). Данъ 1 кубическій метръ воздуха при температурѣ 20_0 и гигрометрическомъ состояніи $\frac{3}{4}$. Опредѣлить вѣсъ водяного пара, который сгустится въ жидкость изъ этого воздуха при пониженіи температуры до 0°.

Упругость насыщающаго пространство водяного пара при 20° равна 17,4 миллиметра, а при 0° она равна 4,6 миллиметра.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 228 (4 сер.). *Построить прямоугольный треугольникъ по данному катету, зная, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ ее въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Пусть въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC перпендикуляръ BD, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ ее въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{DC},$$

откуда слѣдуетъ, какъ извѣстно, что $AD=AC\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Поэтому

$$\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (1).$$

Изъ прямоугольнаго треугольника ABC имѣемъ (см. (1)):

$$\sin C=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{AC\,.\,AD}}{AC}=\sqrt{\frac{AD}{AC}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Это равенство вполнѣ опредѣляетъ острый уголъ C прямоугольнаго треугольника, откуда слѣдуетъ, что всѣ прямоугольные треугольники, въ которыхъ высота, проведенная къ гипотенузѣ, дѣлитъ ее въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, подобны; наоборотъ, легко доказать, что, если опредѣленный прямоугольный треугольникъ отличается этимъ свойствомъ, то и всякій подобный ему треугольникъ также отличается этимъ свойствомъ. Отсюда вытекаетъ построеніе. Дѣлимъ произвольный отрѣзокъ AM въ точкѣ N въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, возставляемъ въ точкѣ N перпендикуляръ къ AM, описываемъ на отрѣзкѣ AM, какъ на діаметрѣ, полуокружность до встрѣчи въ точкѣ K съ этимъ перпендикуляромъ; на одной изъ прямыхъ AK или MK откладываемъ отрѣзокъ AB (или MB'), равный данному катету, и черезъ точку B (или B'), проводимъ прямую, параллельную KM (или AK) до встрѣчи въ точкѣ C съ прямой AM. Треугольникъ ABC (или $MB'C$) есть искомый. Задача имѣетъ вообще два рѣшенія, если только неизвѣстно, какой изъ двухъ катетовъ данъ, большій или меньшій.

И. Плотникъ (Одесса); *Г. Оганова* (Эривань); *Ю. Рабиновичъ* (Одесса); *Г. Томанъ* (Уфа); *Л. Ямпольскій* (Одесса); *Г. Холодный* (Новочеркасскъ); *Д. Иравдинъ* (Петрозаводскъ).

№ 232 (4 сер.). *Прямая, проведенная черезъ основаніе* S *биссектрисы* AS *треугольника* ABC *параллельно касательной въ точкѣ* A *къ кругу, описанному около треугольника, касается круга, вписаннаго въ тотъ же треугольникъ.*

Если разсматриваемая прямая совпадаетъ со стороною BC, то она касается вписаннаго въ треугольникъ ABC круга *). Если же она не совпадаетъ со стороною BC, то, пересѣкая сторону BC въ точкѣ S, она пересѣкаетъ и одну изъ сторонъ AB или AC,—напримѣръ, AB въ точкѣ D. Пусть $\angle BAM$ тотъ изъ угловъ, составленныхъ стороной AB и касательной въ точкѣ A къ кругу, описанному около треугольника ABC, внутри котораго лежитъ дуга AB этого круга, на которую опирается уголъ BCA. Тогда,—такъ какъ, по условію, прямыя SD и AM параллельны,—

$$\angle SDA=\angle BAM=\frac{\smile AB}{2}=\angle ACS.$$

Итакъ, $\angle SDA=\angle ACS$; но, по условію, $\angle DAS=\angle CAS$. Поэтому въ треугольникахъ ASD и ASC углы ASD и ASC также равны, какъ остатки отъ двухъ прямыхъ, такъ что прямая AS есть биссектриса угла DSC; поэтому, центръ

*) Это обстоятельство имѣетъ мѣсто лишь при $AB=AC$.

круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC, лежа на биссектрисѣ треугольника AS, отстоитъ одинаково отъ стороны BC треугольника ABC и отъ прямой SD. Поэтому, кругъ, вписанный въ треугольникъ ABC, касается также прямой DS.

Г. Бубликъ (Сумы); *Д. Правдинъ* (Петрозаводскъ); *Н. С.* (Одесса).

№№ 240, 241 (4 сер.). 1) *Построить прямоугольный треугольникъ, зная, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, имѣетъ данную длину* h *и что для этого треугольника сумма діаметровъ описаннаго и вписаннаго круговъ достигаетъ minimum'а.*

2) *Построить прямоугольный треугольникъ, зная, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, имѣетъ данную длину* h *и что для этого треугольника отношеніе діаметровъ вписаннаго и описаннаго круговъ достигаетъ maximum'a.*

1) Пусть a, b, c, p, R, r суть соотвѣтственно гипотенуза, катеты, полупериметръ и радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго для прямоугольнаго треугольника. Тогда

$$2R=a,\quad r=p-a,\quad 2r=2p-2a,$$

$$2R+2r=2p-2a+a=b+c \qquad (1)$$

$$(2R+2r)^2=(b+c)^2=b^2+c^2+2bc,$$

— или, замѣчая, что $2bc$, какъ четверная площадь прямоугольнаго треугольника, можетъ быть замѣнено черезъ $2ah=4Rh$, а b^2+c^2 черезъ $a^2=4R^2$,—имѣемъ:

$$(2R+2r)^2=4R^2+4Rh=4R(R+h) \qquad (2),$$

откуда видно, что при *положительномъ*, какъ это предполагается условіемъ, значеніи R выраженіе $2R+2r$ достигаетъ minimum'а вмѣстѣ съ R. Но R можно построить какъ медіану, соединяющую средину гипотенузы съ вершиной прямого угла, а потому minimum R наступитъ тогда, когда R обратится изъ наклонной въ перпендикуляръ, т. е. при $R=h$ и, слѣдовательно, прямоугольный треугольникъ станетъ равнобедреннымъ, такъ какъ его медіана и высота совпадутъ.

2) Сохраняя прежнія обозначенія, находимъ: (см. (1))

$$\frac{2r}{2R}=\frac{b+c-2R}{2R}=\frac{b+c}{2R}-2,$$

такъ что maximum разсматриваемаго выраженія достигается одновременно съ maximum'омъ выраженій $\frac{b+c}{2R}$ и $\frac{(b+c)^2}{4R^2}$, или (см. (2)) выраженія $\frac{4R(R+h)}{4R^2}=\frac{R+h}{R}=1+\frac{h}{R}$, т. е. при minimum'ѣ R; слѣдовательно, въ искомомъ треугольникѣ, какъ показано выше, высота h есть медіана и равна $R=\frac{a}{2}$. Для построенія искомаго прямоугольнаго треугольника возставляемъ къ нѣкоторой прямой L въ произвольной точкѣ ея D перпендикуляръ $DA=h$ и откладываемъ на прямой L отрѣзки $DB=DC=h$; *прямоугольный* треугольникъ ABC есть искомый.

Х. Вовси (Двинскъ); *Н. С.* (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig).

№ 242 (4 сер.). *Найти цѣлыя значенія* x, *при которыхъ дробь*

$$\frac{x^3+2x^2-4}{x^2-x-1}$$

принимаетъ цѣлыя значенія.

Дѣля числителя данной дроби на знаменателя, получаемъ:

$$\frac{x^3+2x^2-4}{x^2-x-1}=x+3+\frac{4x-1}{x^2-x-1}. \qquad (1)$$

При x цѣломъ и бо́льшемъ 1 числовыя величины многочленовъ x^2-x-1 и $4x-1$ положительна. Дѣйствительно, $x^2-x-1=x(x-1)-1$; при x цѣломъ и бо́льшемъ 1 каждый изъ сомножителей произведенія $x(x-1)$ есть цѣлое положительное число, при чемъ одинъ изъ этихъ двухъ сомножителей болѣе 1; слѣдовательно, $x(x-1)-1>0$. Кромѣ того, изъ $x>1$ имѣемъ: $4x>4>1$, $4x-1>0$.

Разсматривая разность многочленовъ x^2-x-1 и $4x-1$, находимъ:

$$(x^2-x-1)-(4x-1)=x^2-5x=x(x-5) \qquad (2).$$

При $x>5$ оба сомножителя произведенія $x(x-5)$ положительны, а потому и само произведеніе положительно; поэтому, при x цѣломъ и бо́льшемъ 5 числовая величина выраженія $\frac{4x-1}{x^2-x-1}$ есть правильная дробь. Дѣйствительно, при $x>5$, тѣмъ болѣе, $x>1$, и потому, какъ выше показано, $4x-1>0$, $x^2-x-1>0$, и, кромѣ того (см. 2), $x^2-x-1>4x-1$. Итакъ, при x цѣломъ и бо́льшемъ 5, $x+3$ есть число цѣлое, а $\frac{4x-1}{x^2-x-1}$ — правильная дробь; слѣдовательно, при x цѣломъ и бо́льшемъ 5, дробь $\frac{x^3+2x^2-4}{x^2-x-1}$ принимаетъ (см. 1) *дробныя* числовыя значенія.

При x цѣломъ и отрицательномъ, назовемъ абсолютную величину x черезъ m. Тогда

$$|4x-1|=4m+1 \ (3), \quad |x^2-x-1|=|m^2+m-1|.$$

Но, такъ какъ m число цѣлое, то $m^2\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, $m^2+m\geqslant 2>1$, $m^2+m-1>0$. Поэтому,

$$|x^2-x-1|=|m^2+m-1|=m^2+m-1 \qquad (4).$$

Изъ равенствъ

$$(m^2+m-1)-(4m+1)=m^2-3m-2=m(m-3)-2 \qquad (5)$$

мы видимъ, что при $m>3$ оба сомножителя произведенія $m(m-3)$ суть *цѣлыя* положительныя числа, одно изъ которыхъ болѣе 3; значитъ, при $m>3$ имѣемъ: $m(m-3)-2>3-2>0$.

Такимъ образомъ, (см. (3), (4), (5)), при x цѣломъ и меньшемъ (-3), абсолютная величина многочлена x^2-x-1 болѣе абсолютной величины многочлена $4x-1$; слѣдовательно, при x цѣломъ, меньшемъ (-3), числовая величина выраженія $\frac{4x-1}{x^2-x-1}$ есть правильная дробь, а потому (см. (1)), при этихъ условіяхъ выраженіе $\frac{x^3+2x^2-4}{x^2-x-1}$ получаетъ *дробныя* числовыя значенія.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что дробь $\frac{x^3+2x^2-4}{x^2-x-1}$ можетъ принимать цѣлыя значенія лишь въ предѣлахъ, обусловленныхъ неравенствами

$$5\geqslant x\geqslant -3.$$

Испытывая цѣлыя значенія $x=5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$, заключенныя въ этихъ предѣлахъ, убѣждаемся, что условію задачи удовлетворяютъ лишь рѣшенія $x=5, 2, 1, 0, -1$.

И. Плотникъ (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 26-го Марта 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.